O Efeito Aharonov Bohm

Etevaldo dos Santos Costa Filho[1]
Instituto de Física de São Carlos-USP.

(Dated: 6 de junho de 2018)

O efeito Aharanov-Bohm é discutido em detalhes: a partir da introdução de conceitos fundamentais a respeito do eletromagnetismo como uma teoria de calibre e as repercusões dessa simetria na mecânica quântica. Além das discussões usuais, mais conceituais sobre o efeito, o problema de espalhamento quântico de elétrons em uma região com campo magnético confinado é feito.

Palavras-chaves: Efeito Aharonov-Bohm, Simetria de Calibre, Teorema de Stokes, Fase não integrável.

I. COMENTÁRIOS PRELIMINARES

A. Formalismo Hamiltoniano

A Hamiltoniana de uma partícula sujeita ao campo eletromagnético é escrita em termos dos potenciais auxiliares,onde a assinatura da métrica do espaço-tempo de Minkowski que será utilizada é $(-,+,+,+)$, $A^\mu = \{\phi, -\vec{A}\}$ e tem a forma:

$$H = \frac{1}{2m}\big(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\big)^2 + q\varphi \tag{1}$$

Perceba que a Hamiltoniana não é invariante sob uma troca de calibre:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \xi(x) \tag{2}$$

fazendo-se faz necessário especificar o calibre que descreverá os campos, ou seja, deve-se explicitar quem são φ e $\vec{A}$, onde as Hamiltonianas calculadas em calibres diferentes se relacionam por:

$$H' = H - \frac{q}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\big(\frac{q^2}{c^2}(\nabla\xi)^2 - \frac{q}{c}\vec{P}\cdot\nabla\xi - \frac{q}{c}\nabla\xi\cdot\vec{P} + \frac{2q^2}{c^2}\vec{A}\cdot\nabla\xi\big) \tag{3}$$

É natural que a posição $\vec{x}$ e a velocidade $\vec{v}$ não dependam da escolha do calibre. Consequentemente, a dinâmica do momento canônico $\vec{p}$ depende, em cada ponto, da escolha do calibre. A relação metre $\vec{p'}$ e $\vec{p}$, ligados por uma transformação de calibre é: $\vec{p'} = \vec{p} + \frac{q}{c}\nabla\xi$.

II. SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA

A. Invariância de calibre na mecânica quântica

Os estados de uma partícula são obtidos ao resolver a equação de Schrödinger com a Hamiltoniana 1 trocando funções por operadores. Para resolver tal equação, é preciso que os potenciais sejam exatamente especificados. Conclui-se então que, pelo menos a priori, são os potenciais auxiliares e não os campos eletromagnéticos que desempenham o papel fundamental nas expressões física.

É sabido que uma transformação de fase global na função de onda pode sempre ser realizada sem que a dinâmica da partícula seja afetada. Contudo, de forma geral, uma transformação local na fase não é simetria das equações de movimento. Em outras palavras, é possível definir a fase em um ponto qualquer do espaço e do tempo, mas essa escolha determina a fase da função de onda para qualquer outro ponto. Diferentemente da mecânica quântica na ausência de campos eletromagnéticos, para uma partícula carregada acoplada com tais campos , a escolha da fase é arbitrária para todo ponto, ou seja, duas funções de onda relacionadas por uma transformação local de fase descrevem a mesma física.

Tendo em mãos a forma como a Hamiltoniana muda sob uma transformação de calibre, é possível calcular como a função de onda se transforma. Sejam Ψ, $\hat{H}$, Ψ' e $\hat{H}'$, onde as Hamiltonianas estão conectadas por uma transformação de calibre, tais que:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$
$$i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t} = \hat{H}'\Psi'$$

Uma vez que a escolha do calibre é arbitrária, segue que as quantidades físicas se trsnformam por uma transformação unitária $U(\vec{x},t)$, isto é, $\Psi' = U\Psi$ e $\hat{H}' = U\hat{H}U^{-1}$. Usando que as Hamiltonianas calculadas em calibres distintos se relacionam por 3, é trivial ver que:

$$U(\vec{x},t) = e^{ig\xi(\vec{x},t)} \qquad , g \equiv \frac{iq}{\hbar c} \tag{4}$$

Quando os potenciais eletromagnéticos estão presentes pode ser feita uma escolha de fase para cada ponto do espaço. A escolha de uma fase particular $\xi(x)$ não afetará nenhum observável físico, tendo em vista que com uma nova escolha de fase, os potencias devem também alterar sua forma. Essa transformação nos potenciais, com a forma 2, é tal que os efeitos da mudança de fase são cancelados. Sob outra perspectiva, embora $\vec{A}$ e φ possam ser alterados por uma transformação de calibre e assim alterar a função de onda por uma fase, os observáveis não são afetados.

B. Campo de Calibre

A imposição de que as transformações de calibre, na mecânica quântica acoplada com o eletromagetismo, formem uma simetria local leva a existência de um espaço interno associado ao grupo $U(1)$. Tal espaço interno consiste em todos os possíveis valores para a fase da função de onda. Esse grupo pode ser interpretado como a coordenada angular em um plano complexo, ou seja, o espaço interno de $U(1)$ forma um anel neste plano com cada ponto do espaço interno correspondendo ao valor da fase da função de onda.

Uma ilustração esquemática do campo de calibre e como a invariância funciona como segue. O espaço-tempo é representado pela hipersuperfície (x^μ). De cada ponto do espaço-tempo uma "fibra" se estende para "cima", representando o espaço interno, onde cada calibre é um ponto sobre essa fibra. O campo de calibre, em geral, varia com x^μ, desse modo o calibre em cada pontp estará em uma altura diferente. Os pontos no espaço-tempo são, naturalmente, densamente empacotados (como devem ser para representar um contínuo), por conseguinte, a coleção de fibras é denominada "feixe".

Da seção I A vê-se que o campo de calibre aparece tanto no operador momento cinético como em outras quantidades físicas, como o momento angular cinético. Isso é essêncial ao se exigir a invariância de calibre, uma vez que na representação de posição, esses operadores aparecem como derivads. Na figura acima, uma transformação de calibre é representada pelo deslocamento dos pontos azuis ao longo de suas respectivas fibras, ao mesmo tempo em que a função de onda muda de maneira correlacionada (variando o fator de fase indicado pelos pontos vermelhos), garantindo assim a invariância de calibre. O ângulo de fase é definido em relação aos eixos mostrados na figura.

C. Derivada Covariante

Uma vez que o ângulo do espaço interno pode ser escolhido arbitrariamente em cada ponto do espaço-tempo, se faz necessário definir uma conexão apropriada para comparar medidas em x e $x + dx$. Foi visto que a teoria é invariante sob a troca:

$$\Psi(x) \longrightarrow e^{ig\xi(x)}\Psi(x) \tag{5}$$

Como essa é uma simetria local, há uma dificuldade em entender a derivada como uma comparação entre x e $x + dx$:

$$\eta^\mu \partial_\mu \Psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\big(\Psi(x^\mu + \epsilon\eta^\mu) - \Psi(x^\mu)\big)}{\epsilon}$$

Já que $\Psi(x+\epsilon\eta)$ e $\Psi(x)$ se transformam diferente sob 5. Com o objetivo de subtrair os valores de $\Psi(x)$ dos pontos vizinhos com algum sentido físico de comparação, deve-se introduzir um fator que compensa a diferença em uma transformação de fase de um ponto a outro. A maneira mais simples de se fazer isso é definir uma quantidade escalar $U(y, x)$, que dependa desses dois pontos e do caminho entre eles, cuja lei de transformação, quando 5 ocorre, seja

$$U(y, x) \longrightarrow e^{ig\xi(y)}U(y, x)e^{-ig\xi(x)} \tag{6}$$

Com a condição de que se a distância de separação entre os dois pontos for zero $U(x, x) = 1$. É natural estabelecer $U(y, x) = e^{if(y,x)}$. Com essa definição, os objetos $\Psi(y)$ e $U(y, x)\Psi(x)$ possuem a mesma lei de transformação, desse modo pode-se compará-los com alguma significância física. Introduz-se então a derivada covariante:

$$\eta^\mu D_\mu \Psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\big(\Psi(x + \epsilon\eta) - U(x + \epsilon\eta, x)\Psi(x)\big)}{\epsilon} \tag{7}$$

Para tornar a comparação explícita é necessário encontrar uma expressão para $U(y, x)$ em uma separação infinitesimal. Se $U(y, x)$ é uma função contínua de x e y, então pode ser expandido em termos da separação entre y e x.

$$U(x + \epsilon\eta, x) \approx 1 - ig\epsilon\eta^\mu A_\mu(x) + O(\epsilon^2)$$

Onde A_μ é um campo vetorial novo. Tal campo exerce o papel de conexão na derivada covariante.

$$D_\mu \Psi(x) = \partial_\mu \Psi(x) + igA_\mu(x)\Psi(x) \tag{8}$$

Para que a construção seja consistente é necessário que A_μ se transforme por uma transformação de calibre:

$$U(x + \epsilon\eta, x) \longrightarrow U'(x + \epsilon\eta, x) = e^{ig\xi(x+\epsilon\eta)}U(x + \epsilon\eta, x)e^{-ig\xi(x)}$$
$$\approx 1 - ig\eta^\mu(A_\mu - \partial_\mu\xi)$$

Ou seja, sob uma transformação de calibre o vetor A_μ se transforma da seguinte maneira:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu\xi \tag{9}$$

O operador diferencial, $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$, é denominado *derivada covariante* por se tratar de fato de um operador de derivação, satisfazendo todas as propriedades necessárias (linearidade, Leibniz, etc.) e se transformar, sob uma transformação de calibre, da mesma maneira que ψ, i.e., no mesmo ponto, de forma covariante:

$$\Psi(x) \to e^{ig\xi(x)}\Psi(x) \tag{10}$$
$$(D_\mu\Psi)(x) \to e^{ig\xi(x)}(D_\mu\Psi)(x). \tag{11}$$

Essa covariância é garantida uma vez que o campo de calibre A_μ também se transforma, e o faz de maneira exata a cancelar o termo proporcional à derivada da função $\xi(x)$, que é exatamente como se transforma o campo de calibre introduzido no eletromagnetismo. Neste ponto fica portanto evidente a identificação do campo de calibre introduzido acima para a manutenção da invariância de calibre local com o campo de calibre introduzido a partir das equações de Maxwell homogêneas.

D. Transporte Paralelo

Na teoria quântica a probabilidade de ocorrência de um evento é determinada a partir da função de onda associada àquele sistema. Para uma partícula livre em um certo ponto x_a, a solução da equação de Schrödinger deve determinar o estado final desta partícula no ponto x_b, logo definindo a probabilidade de ali encontrá-la, independentemente dos pontos intermediários entre x_a e x_b. Dada a invariância de calibre global, naturalmente a fase da função de onda é arbitrária e somente diferenças entre fases em pontos distintos têm alguma relevância.

Acontece que em um cenário aonde a invariância de calibre local é considerada, a fase adquirida pela função de onda é dependente do caminho escolhido para ligar os pontos inicial e final x_a e x_b. Essa dependência está intimamente relacionada à existência de um campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$, o que conecta novamente a ideia de calibre de Weyl com o eletromagnetismo.

Considere uma curva γ dada parametricamente por $x^\mu(\sigma); \gamma : [0, \sigma]$. A relação entre a função de onda calculada em $\sigma = 0$ e a função em um ponto σ qualquer pertencente a γ é dada pelo transporte paralelo,

$$\frac{D\Psi}{D\sigma} = 0 \tag{12}$$

Para resolver esta equação, é necessário definir o caminho γ o qual o transporte paralelo será realizado.

$$\frac{d\Psi}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dx^\mu} + igA_\mu\Psi = 0$$
$$\frac{d\Psi}{d\sigma} + igA_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\Psi = 0$$

O que leva a:

$$\Psi(\sigma) - \Psi(0) = -ig\int_0^\sigma A_\mu\Psi(\sigma')\frac{dx^\mu}{d\sigma'}\,d\sigma' \tag{13}$$

A equação acima pode ser resolvida ao usar a recorrência para construir uma série cuja solução é:

$$\Psi = \exp\big(- ig\int_\gamma A_\mu\,dx^\mu\big)\Psi_0 \tag{14}$$

Este é o famoso *princípio de calibre* que define que o acoplamento com o campo eletromagnético modifica a fase da função de onda, tornando-a, em princípio, dependente da trajetória no espaço-tempo em que se dá o "movimento" da partícula via o campo de calibre A_μ.

A equação 14 também mostra uma relação poderosa. Ela compara a função de onda resolvida para a partícula desacoplada com os campos com a função de onda com acoplamento. O fundamental dessa relação é que a equivalência entre as duas funções de onda se dá, somente, por um fator de fase.

Ao se assmir que funções de ondas calculadas por caminhos diferentes são indendentes, a função de onda total, válida em todo espaço, se dá pela soma das funções de onda calculadas por todos caminhos possíveis. Seja então $C = \{\Gamma : [0, \sigma] \to \mathbb{R}^3 : \Gamma(0) = x_a; \Gamma(\sigma) = x_b\}$ o espaço de todos caminhos entre o ponto inicial e final, x_a e x_b. Então, a função de onda total é dada por:

$$\Psi(x_b) = \int_C exp\big(- ig\int_\gamma A_\mu\,dx^\mu\big)\Psi_0(\gamma)\,D\Gamma \tag{15}$$

E. O teorema de Stokes e suas implicações

A maneira como a mudança da trajetória γ, que liga x_a a x_b, para γ', ligando os mesmos pontos, altera a solução da equação pode ser vista da seguinte forma.

Primeiramente observa-se que o resultado da transformação de calibre da função de onda $\Psi_0(x)$ é solução da equação

$$D_\mu\Psi(x) \equiv (\partial_\mu + igA_\mu)\,\Psi(x) = 0. \tag{16}$$

Tomando o caminho γ como parametrizado por $\sigma \in [0, 2\pi]$, de modo que $x_a = x^\mu(\sigma = 0)$ e $x_b = x^\mu(\sigma = 2\pi)$, a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{d\Psi}{d\sigma} + igA_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\Psi = 0. \tag{17}$$

Considera-se então a variação $x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu$ de cada ponto de γ. Para se obter a respectiva variação da função de onda, $\Psi \to \Psi + \delta\Psi$, toma-se a variação da própria equação definidora de Ψ acima,

$$\delta\frac{d\Psi}{d\sigma} + ig\delta(A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma})\Psi + igA_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\delta\Psi,$$

que quando multiplicada por Ψ^{-1} e reorganizada resulta em

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\Psi^{-1}\delta\Psi\right) + igF_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\delta x^\nu + ig\frac{d}{d\sigma}\left(A_\mu\delta x^\mu\right) = 0. \tag{18}$$

Onde foi usado que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\ \mu, \nu = 0, \ldots, 3$. Tomando-se em conta que $\delta x^\mu(0) = \delta x^\mu(2\pi) = 0$ uma vez que os pontos x_a e x_b são fixos, integrando a equação remanescente acima em σ obtém-se

$$\delta\Psi = -ig\left(\int_0^{2\pi} F_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}d\sigma\delta x^\nu\right)\Psi(\gamma). \tag{19}$$

Ou seja, dado que $F_{\mu\nu}$ seja não nulo, a função de onda obtida resolvendo-se 17 ao longo de γ, $\Psi(\gamma)$, muda para $\Psi(\gamma) \to \Psi(\gamma) + \delta\Psi$, como dado acima, em cada ponto ao longo do caminho.

Se cada caminho diferente ligando os pontos x_a e x_b for então rotulado por $\tau \in [0, 2\pi]$, sendo portanto $\tau = 0$ correspondente a γ, os pontos do espaço-tempo podem ser parametrizados como $x^\mu = x^\mu(\sigma, \tau)$ e a equação acima define uma equação diferencial em τ, uma vez que $\delta x^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}\delta\tau$:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} + ig\left(\int_0^{2\pi} F_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}d\sigma\right)\Psi = 0. \tag{20}$$

Essa equação pode ser agora integrada em τ, resultando em

$$\Psi = \Psi(\gamma)\; e^{-ig\int_\Sigma F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}, \tag{21}$$

aonde Σ é a área definida pela variação do caminho inicial γ, i.e., é a área cuja borda é $\partial\Sigma = {\gamma'}^{-1} \circ \gamma$.

Em particular, se $x_b = x_a$, ou seja, se o caminho γ é um laço fechado infinitesimal tendo como ponto de referência o ponto x_a, então o fato de que a função de onda ao longo do caminho γ', obtido de γ por variações contínuas parametrizadas por τ pode ser calculada resolvendo-se 17 ou equivalentemente 20 constitui-se exatamente no enunciado do teorema de Stokes:

$$e^{ig\oint_{\partial\Sigma} A_\mu dx^\mu} = e^{-ig\int_\Sigma F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}. \tag{22}$$

O lado direito da igualdade acima contém o fluxo do campo eletromagnético através de uma superfície Σ, enquanto o lado esquerdo, a circulação do campo A_μ na borda dessa superfície. Em particular, no caso em que $F_{0i} = 0$, o teorema de 22 fica

$$e^{-ig\oint_{\partial\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{x}} = e^{-ig\Phi(\vec{B},\Sigma)} \tag{23}$$

aonde $\Phi(\vec{B}, \Sigma) = \int_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{S}$ é o fluxo do campo magnético através da superfície espacial Σ.

III. O EFEITO AHARONOV-BOHM

Daqui define-se o cenário para a importante observação feita por Bohm e Aharonov em seu artigo original em 1951[1]: ainda que o campo magnético seja nulo na região aonde se definem as possíveis trajetórias para uma partícula carregada, digamos, um elétron, a existência de um campo de calibre não nulo ali, e consequentemente a mudança de fase na função de onda, pode levar à efeitos observáveis.

A existência de um campo magnético definido como um defeito no espaço tridimensional, i.e., uma linha inifinta por exemplo na direção $\hat{z}$, resulta na divisão desse espaço em duas regiões, no que diz respeito às possíveis famílias de laços ali construidas: dado um ponto de referência, por exemplo $\vec{x}_a$, existem os laços que envolvem a região no plano perfurado pelo campo magnético, i.e., que contornam o cilindro com eixo de simetria em z, e existem os laços que não o fazem, e que portanto são contráteis: enquanto os laços do primeiro tipo não podem ser deformados continuamente até o ponto (ou laço trivial) $\vec{x}_a$, os do segundo tipo são efetivamente idênticos a ele.

Dois caminhos, γ e γ' que ligam os pontos $\vec{x}_a$ e $\vec{x}_b$, podem ser vistos como partes de um único laço, ${\gamma'}^{-1} \circ \gamma$, do tipo não contrátil. Uma vez que esses caminhos representam trajetórias possíveis de um elétron que sai de $\vec{x}_a$ e é observado em $\vec{x}_b$, a função de onda deste elétron deve ser dada, como discutido na equação (**??**), pela soma das funções de onda referentes a cada caminho:

$$\Psi = \Psi_\gamma + \Psi_{\gamma'}. \tag{24}$$

Ora, tendo em vista que, ainda que o campo magnético seja confinado à uma região limitada, digamos um cilindro de raio a, por continuidade o potencial vetor em $r > a$, por onde passam as trajetórias possíveis do elétron, deve ser não nulo, o que significa que a função de onda é igual à função de onda do elétron livre, Ψ_0, multiplicada por uma fase que deve depender do caminho escolhido:

$$\Psi = \Psi_0(\gamma)e^{ig\int_\gamma A} + \Psi_0(\gamma')e^{ig\int_{\gamma'} A} \tag{25}$$

Uma vez que a integral de linha ao longo de γ' pode ser reescrita como

$$\int_{\gamma'} A = -\int_{{\gamma'}^{-1}} A,$$

a expressão para a função de onda acima pode ser escrita de maneira mais conveniente como

$$\Psi = e^{ig\int_{\gamma'} A}\left\{\Psi_0(\gamma)e^{ig\oint_\Gamma A} + \Psi_0(\gamma')\right\} \tag{26}$$

Sendo $\Gamma \equiv \gamma' \circ \gamma$. Segue então do teorema de Stokes que a diferença de fase entre as funções (a fase comum é naturalmente desprezível) é definida exatamente pelo fluxo do campo magnético confinado à região do cilindro de raio a, $\Phi(\vec{B}, \Sigma_a)$.

Esse deve ser o efeito observável em um problema de interferência, análogo ao experimento de Young, porém com um campo magnético como descrito. Existe entretanto uma situação aonde a interferência não é observada: quando o fluxo do campo magnético é múltiplo de $\frac{hc}{q}$.

A. Partícula confinada em um anel

O exemplo mais simples, resolvível, do efeito Aharonov-bohm exibe todas as características de estado ligado. Considere a partícula carregada restringida a se mover em uma circunferência de raio "b" no plano x-y. Considere também um solenoide infinito ao longo do eixo z com raio "a", que produz um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ e confinado em seu interior.

A região a qual a partícula é permitida se mover é tal que $\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}) = 0$ e $\vec{A}(\vec{x}) \neq 0$. Como dito anteriormente, para que um efeito observável exista é necessário que a região com $\vec{B}$ diferente de zero esteja no interior da região em que a partícula é permitida se mover.

Para produzir um campo magnético constante, uma escolha de calibre é: $\vec{A_{in}}(\vec{x}) = \dfrac{Br\hat{\phi}}{2}$ que representa o potencial vetor dentro do cilindro e $\vec{A}_{out} = \dfrac{\Phi\hat{\phi}}{2\pi r}$ para região no exterior. Tal escolha satisfaz o calibre de Coulomb $(\nabla \cdot \vec{A} = 0)$.

A equação de Schrödinger independente do tempo para tal partícula é:

$$\frac{1}{2m}\big(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\hat{\vec{A}}_{out}\big)^2\Psi = E\Psi \tag{27}$$

O que leva à:

$$\frac{1}{2m}\Big(\frac{-\hbar^2}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \big(\frac{q\Phi}{2\pi cb}\big)^2 + i\frac{\hbar q\Phi}{cb^2\pi}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big)\Psi = E\Psi$$

Definindo: $\beta \equiv \dfrac{-q\Phi}{hc}$, $k^2 \equiv \dfrac{2mE}{\hbar^2}$ e que, após alguma manipulação, toma a forma:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + i2\beta\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + \big(k^2b^2 - \beta^2\big)\Psi = 0 \tag{28}$$

Dado o ansatz $\Psi \sim \exp(il\phi)$ e substituindo na equação acima, onde a suposição de que l é um inteiro para qualquer valor do fluxo é a exigência de que a função de onda deva ser unívoca[2], obtemos:

$$-l^2 - 2l\beta + k^2b^2 - \beta^2 = 0 \longrightarrow l = -\beta \pm |kb|$$

Por ser necessária o uso de condições periódicas de contorno, i.e.,$\Psi(0) = \Psi(2\pi)$, tem-se que $l \in \mathbb{Z}$. Consequentemente, $E_l = \frac{\hbar^2}{2mb^2}(l+\beta)^2$. Assim, para cada l temos uma autofunção$\Psi_l = \dfrac{e^{il\phi}}{\sqrt{2\pi}}$. Nota-se que a energia para valores de l com mesma magnitude, mas com sinais opostos, não é degenerada como quando $\vec{A} = \vec{0}$. Percebe-se também, que o giro no sentido horário e o anti-horário possuem agora velocidades diferentes para o mesmo valor de $|l|$. Nota-se que a presença de $\vec{A}$ remove a dupla degenerescência do caso dessa partícula na ausência de acoplamento.

O auto estado Ψ_l possui momento angular canônico $\hat{\vec{L}}_z$ e cinético $\hat{\vec{K}}_z$, dados por:

$$L = \hbar l; \qquad K_z = \hbar(l+\beta) \tag{29}$$

A energia e o momento angular cinético mostram claramente dependência do fluxo magnético, apesar do campo magnético ser zero fora do solenoide.

Note que ambos espectros, energia e momento angular cinético, são periódicos em Φ com período igual a $\frac{hc}{|q|}2$. Assim, quando o fluxo magnético não é multiplo inteiro de $\frac{hc}{|q|}$ o espectro é deslocado.

B. Quantização do fluxo magnético em um supercondutor

O efeito Meissner-Ochsenfeld mostra que tanto o campo magnético quanto a densidade de corrente de probabilidade são zero no supercondutor[4]. Um fenômeno interessante ocorre no experimento anterior quando o anel é trocado por um anel supercondutor. Foi previsto teoricamente, que o fluxo magnético que passa através do anel supercondutor deve ser quantizado, isto é, $\Phi = \dfrac{hc}{q}n$ com $n \in \mathbb{Z}$.

No caso de um supercondutor, a função de onda descreve um par de elétrons (pares de Cooper). Desse modo, a função de onda é análoga ao problema anterior ao se escolher o mesmo calibre. Contudo, para enfatizar que o resultado é independente da escolha do calibre, a forma de $\vec{A}$ ficará livre. O ansatz da solução deve ser:

$$\Psi \sim \exp\big(if(\phi)\big);$$

Uma vez que a direção $\hat{\phi}$ é a única permitida ao par. Sendo a densidade de corrente de probabilidade:

$$\vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m}\big(\Psi^*\vec{D}\Psi - \Psi(\vec{D}\Psi)^*\big) \sim \frac{-i\hbar}{2m}\big(2i\nabla f(\phi) - 2ig\vec{A}\big)$$

Uma vez que a corrente de probabilidade deve ser zero em um supercondutor, tem-se que:

$$\nabla f(\phi) = g\vec{A}$$

Fazendo a integral fechada no anel:

$$f(2\pi) - f(0) = g\oint d\vec{x}\,\vec{A} = g\Phi \tag{30}$$

Como a função de onda deve ser unívoca, $f(2\pi) - f(0) = 2\pi n$ com $n \in \mathbb{Z}$. Experimentalmente é sabido que $q = -2e$, onde e é a carga elementar do elétron. Assim, como esperado:

$$\Phi = \frac{hc}{2e}n; \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

Logo, o fenômeno em supercondutividade conhecido como quantização do fluxo magnético é que o fluxo total encerrado por um anel de material supercondutor deve deve ser múltiplo inteiro de $\frac{hc}{2e}$. Tal fenômeno de quantização do fluxo é uma propriedade particular dos supercondutores e não uma propriedade geral da mecânica quântica acoplada com o campo eletromagnético[2].

C. Efeito Aharonov-Bohm no Espalhamento

A solução exata para o problema de espalhamento de um feixe de partículas carregadas por um fluxo magnético no limite em que o raio “a” do solenoide, que contém o fluxo, vá à zero enquanto o próprio fluxo magnético permanece constante, é dada a seguir. Assim como na seção III A, usar-se-á o calibre $\vec{A} = q\Phi\hat{\phi}/2\pi r$ (vale calibre de Coulomb). Como o momento linear canônico na direção "z"comuta com a Hamiltoniana, seu valor é esolhido igual à zero. Será então estudado o espalhamento em coordenadas polares. A equação de Schrödinger correspondente é:

$$\frac{1}{2m}\big(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\big)^2\Psi(r,\phi) = E\Psi(r,\phi)$$

Definindo $\beta \equiv \frac{-q\Phi}{ch}$ e $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Fazendo separação de variáveis $\Psi(r,\phi) = \chi(r)\Theta(\phi)$. Usando o ansatz $\Theta = \exp(il\phi)$ com $l \in \mathbb{Z}$ da seção seção III A. Após algumas manipulações, se torna:

$$\rho^2\frac{d^2\chi}{d\rho^2} + \rho\frac{d\chi}{d\rho} + \big(\rho^2 - (l+\beta)^2\big)\chi = 0$$

Onde $\rho \equiv kr$. Essa equação é equação diferencial de Bessel. Como a condição de contorno exige que que a função de onda seja zero na origem, é necessário descartar a solução de Neumann. Dado o ansatz para o coeficenteda função de Bessel $a_l = (-i)^{|l+\beta|}$ para dar o assintótico certo[1].

Sem perda de generalidade, pode-se decompor $\beta \longrightarrow n + \beta$; sendo agora $|\beta| < 1$ onde $n \in \mathbb{Z}$ (sempre é possível ficar com $|\beta| < 1$, seja qual for seu valor original). Portanto,

$$\Psi(\rho,\phi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}(-i)^{|l+\beta+n|}J_{|l+\beta+n|}(\rho)e^{il\phi} \tag{32}$$

Que para grandes distâncias, toma a forma:

$$\Psi = e^{-i\rho\cos\phi - i(\beta+n)\phi} + \frac{e^{i\rho}\sin(\beta\pi)e^{-i\phi(1/2+n)}}{(-2i\pi\rho)^{1/2}\cos(\phi/2)} \tag{33}$$

Vale ressaltar que o assintótico acima é válido para $\phi \neq \pi$. O primeiro termo da equação acima representa a onda incidente e o segundo a onda espalhada.A seção de choque diferencial é dada por:

$$\sigma = |f(\phi)|^2 = \frac{sin^2(\beta\pi)}{2\pi\cos^2(\phi/2)} \tag{34}$$

Um leitor mais atento poderia questionar sobre a validade deste resultado, em razão do fluxo usado estar contido em um solenoide de raio 0 e da ausência de um fluxo de retorno. Todavia, foi mostrado por[3] e[5] que essas objeções são irrelevantes. Demonstraram também que o espalhamento por um solenoide ou um toroide de raio finito ainda levam a resultados que dependem do fluxo confinado.

IV. COMENTÁRIOS FINAIS

O efeito Aharonov-Bohm é um efeito topológico, na medida em que o efeito depende do fluxo confinado pelos caminhos disponíveis para a partícula, mesmo que os caminhos nunca entrem em contato com a região do fluxo. Como a força magnética na carga q, $qv \times B$, desaparece em todos os caminhos possíveis da partícula, pode-se imaginar se a carga é necessária para o efeito. De acordo com a teoria, o efeito depende de uma relação que é proporcional a carga, e foi confirmado experimentalmente que nenhum efeito Aharonov-Bohm ocorre se são utilizados nêutrons em vez de elétrons.

Um questionamento recorrente é sobre a univocidade da função de onda. De fato, de acordo com (14), funções de onda que transportadas por caminhos diferentes levam a valores diferentes. O que foi tentado mostrar nas discussões anteriores é que, na verdade, a função de onda total é uma somatória de funções de onda transportadas por todos os caminhos possíveis. Por conseguinte, a função de onda total seria únivoca.

Um outro ponto que causa bastante dúvida é como se deve interpretar o efeito. Ao assumir a visão clássica de que são os campos eletromagnéticos os campos significativos, para que o efeito seja entedido, deve-se assumir que na mecânica quântica, tais campos podem ter uma influência não local. Alternativamente, pode-se considerar que são os potenciais que são fisicamente significantes, embora estejam sob o requerimento de que uma transformação de calibre não pode levar à efeitos físicos. Esta visão está de acordo com a noção relativística de que os campos só podem interagir localmente.

REFERÊNCIAS

[1] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115:485–491, Aug 1959. Citado 2 vezes nas páginas 4 and 6.

[2] M. Peshkin and A. Tonomura. *The Aharonov-Bohm Effect.* Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 5 and 6.

[3] Murray Peshkin, Igal Talmi, and Lindsay J Tassie. The quantum mechanical effects of magnetic fields confined to inaccessible regions. *Annals of Physics*, 12(3):426 – 435, 1961. Citado na página 6.

[4] P. Schmüser and Deutsches Elektronen-Synchrotron. *Lectures Given at the CERN-DESY Accelerator School on Superconductivity in Particle Accelerators.* DESY, 1995. Citado na página 5.

[5] L. J. Tassie. The scattering of electrons by a magnetic field contained in an impenetrable torus. *Physics Letters*, 5:43–44, June 1963. Citado na página 6.